ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Определение и свойства определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю, называется *определенным интегралом функции* $f(x)$ *в пределах от* $x = a$ *до* $x = b$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i. \qquad (1)$$

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. предел (1) существует и не зависит от способа разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i при каждом таком разбиении.

Основные свойства

1) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$

2) $\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\, dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\, dx$

(C_1 и C_2 — *постоянные*).

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$

где c — *некоторая точка, лежащая внутри или вне отрезка* $[a, b]$.

2. Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для нее известен неопределенный интеграл

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ (см. гл. VII, § 1), то определенный интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

При вычислениях формулу (2) обычно пишут в виде

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b,$$

где символ справа — «подстановка от a до b» — обозначает ту же самую разность $F(b) - F(a)$.

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить следующие интегралы:

1366. $\int_{-1}^{2} x^2\, dx.$

Решение. $\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$

1367. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\,d\cos x =$

$$=\left(-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3}\right)-\left(-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

1368. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Решение. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{d\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin \ln x\Big|_1^{\sqrt{e}} =$

$$=\arcsin\ln\sqrt{e}-\arcsin\ln 1=\arcsin\frac{1}{2}-\arccos 0=\frac{\pi}{6}.$$

§ 2. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Замена переменной. Часто для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ полезно заменить переменную интегрирования x новой переменной t при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$. При этом необходимо перейти от старых пределов интегрирования a и b к новым пределам α и β, которые определяются из уравнений

$$a=\varphi(\alpha),\quad b=\varphi(\beta).$$

Замена переменной осуществляется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива, в частности, если $f(x)$ — непрерывная функция, а подстановка $x=\varphi(t)$ сама непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$. Подчеркнем, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной в отличие от неопределенного интегрирования возврат к старой переменной не требуется.

В следующих задачах с помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

1379. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Переходим к новой переменной интегрирования, полагая $x=t^2$ $(t>0)$. При $x=0$ получаем $t=0$, а при $x=4$ — $t=2$; поэтому в соответствии с формулой (1) имеем

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^2=4-2\ln 3.$$

1380. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x=2\sin t$. Такая подстановка возможна (так как при любом значении t под корнем получается неотрицательная величина) и приводит к тому, что корень под знаком интеграла исчезает. При этом изменению переменной x от $x=0$ до $x=1$ соответствует изменение переменной t от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{6}$. Применяя формулу (1), получаем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ обладают непрерывными производными на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (3)$$

1391. $\int_0^3 x \operatorname{arctg} x\,dx.$

Решение. Положим $\operatorname{arctg} x = u$, $x\,dx = dv$, тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (3), получаем

$$\int_0^3 x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^3 = 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

1392. $\int_1^e (1+\ln x)^2\,dx.$

Решение. Полагаем $u = (1+\ln x)^2$, $dv = dx$, откуда

$$du = 2(1+\ln x)\frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

а поэтому

$$J = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)\,dx.$$

К последнему интегралу применим еще раз формулу (3), положив $u = 1+\ln x$, $dv = dx$ и $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$:

$$J = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\left[x(1+\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx\right] = 2e - 1.$$

§ 5. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. Вычисление площади в прямоугольных координатах. Если непрерывная кривая задана уравнением

$$y = f(x) \ (f(x) \geq 0),$$

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ (рис. 147), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

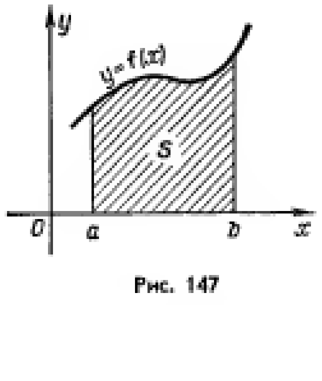

Рис. 147

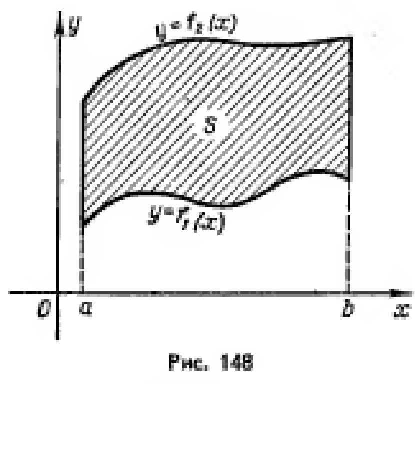

Рис. 148

Если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми

$$y=f_1(x) \quad \text{и} \quad y=f_2(x)$$

и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 148), то

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (2)$$

В случае параметрического задания кривой

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a \leqslant x \leqslant b$, выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \qquad (3)$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a=\varphi(t_1)$ и $b=\varphi(t_2)$ ($\psi(t) \geqslant 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

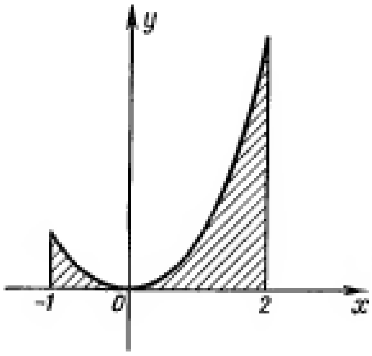

Рис. 149

1445. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=x^2$, прямыми $x=-1$ и $x=2$ и осью абсцисс (рис. 149).

Решение. Искомая площадь вычисляется по формуле (1):

$$S=\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=3.$$

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, где $a<b<\infty$, то полагают

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если существует предел в правой части равенства (1), и называется *расходящимся*, если указанный предел не существует.

Аналогично, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, где $-\infty<a<b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Наконец, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

1417. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)=\frac{\pi}{2}.$$

1418. $\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} \qquad (a>1)$.

Решение. $\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}(\ln\ln b-\ln\ln a)=\infty.$

Следовательно, интеграл расходится.

2. **Интегралы от неограниченных функций.** Если функция $f(x)$ непрерывна при $a < x \leqslant b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т. е. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (\varepsilon > 0). \tag{6}$$

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если существует предел в правой части равенства (6), и *расходящимся*, если указанный предел не существует.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в правом конце отрезка $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (\varepsilon > 0). \tag{7}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, то полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (\varepsilon > 0). \tag{8}$$

1433. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0 \leqslant x < 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, поэтому в силу равенства (7) имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{2}$.